

# Стохастические системы

© 2025 г. А.В. ЛЕБЕДЕВ, д-р физ.-мат. наук (avlebed@yandex.ru)  
(Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова)

## МНОГОМЕРНЫЕ НЕПРЕРЫВНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И КОПУЛЫ, ПОРОЖДАЮЩИЕ НЕТРАНЗИТИВНЫЕ НАБОРЫ ЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Работа продолжает авторский цикл по изучению феномена нетранзитивности отношения стохастического предшествования в теории вероятностей. Исходя из парадокса Кондорсе, построены примеры трехмерных непрерывных распределений и копул, порождающих нетранзитивные наборы зависимых случайных величин. Доказаны предельные теоремы для многомерных смесей.

*Ключевые слова:* нетранзитивность, стохастическое предшествование, копулы, многомерные смеси, предельные теоремы.

DOI: 10.31857/S0005231025040043, EDN: CARPIK

### 1. Введение

В теории и практике различные отношения превосходства между объектами часто обладают свойством транзитивности: если  $A$  превосходит  $B$  и  $B$  превосходит  $C$ , то  $A$  превосходит  $C$ . Однако бывает и по-другому. Например, в классической игре «камень, ножницы, бумага» «камень» побеждает «ножницы», «ножницы» побеждают «бумагу», но при этом «бумага» побеждает «камень».

Различным аспектам и многочисленным примерам нетранзитивности отношений превосходства в природе, технике и обществе посвящен ряд статей А.Н. Поддьякова, в частности [1, 2].

Из недавних зарубежных работ отметим интересные исследования нетранзитивности в биологии, из жизни муравьев [3] и почвенных бактерий [4].

Далее будем говорить о нетранзитивности отношения стохастического предшествования (stochastic precedence) между случайными величинами, а именно, когда одна величина с большей вероятностью меньше другой, чем больше. В [5, 6] это отношение применялось в задачах статистического анализа. Методам сравнения вероятностных распределений на основе статистических данных (гистограмм) посвящена недавняя работа [7], где рассматривались различные стохастические порядки.

К первому упоминанию проблемы нетранзитивности с вероятностной точки зрения можно отнести работу С. Трыбулы совместно с Г. Штейнгаузом,

где в качестве приложения была рассмотрена прочность материалов [8, 9]. Пусть в лаборатории сравнивают попарно на прочность железные бруски с трех разных заводов. Тогда теоретически может сложиться ситуация, что бруски с первого завода «хуже» брусков со второго завода (чаще оказываются менее прочными), бруски со второго «хуже» брусков с третьего, а бруски с третьего «хуже» брусков с первого.

В недавней работе [10] подобное явление было реально обнаружено в медицинской статистике при сравнении продолжительности жизни в некоторых группах людей.

Тема нетранзитивности приобрела популярность на примере *нетранзитивных костей* (nontransitive dice). Имеются в виду наборы игральных костей, на грани которых нанесены числа таким образом, чтобы создать нетранзитивные отношения соответствующих случайных величин. Нетранзитивные кости были популяризованы М. Гарднером [11, 12], им посвящена обширная литература.

Автор настоящей работы продолжает начатые в [13–17] исследования нетранзитивности (в этих работах можно ознакомиться более подробно с проблематикой, историей вопроса, литературой и приложениями). При этом, если ранее изучался случай независимых случайных величин, теперь речь о зависимых случайных величинах.

Классическим примером в этом смысле может служить знаменитый парадокс Кондорсе при голосовании. Изложим его в простейшей формулировке. Пусть имеются три кандидата на некоторый пост и три избирателя, которые имеют предпочтения кандидатов (в баллах) в соответствии со следующими вектор-строками:

$$(1) \quad \begin{array}{l} (1, 2, 3) \\ (3, 1, 2) \\ (2, 3, 1). \end{array}$$

Тогда при выборе между первым и вторым кандидатом побеждает второй. Действительно, у первого и третьего избирателей оценка второго кандидата выше, чем первого ( $1 < 2$  и  $2 < 3$  соответственно), а у второго избирателя ниже ( $3 > 1$ ), так что второй кандидат побеждает двумя голосами из трех. Аналогично, при выборе между вторым и третьим кандидатом побеждает третий, но между первым и третьим – первый.

Подобные ситуации часто возникают при экспертном оценивании, например, качества товаров. При этом трудности связаны с тем, что многие характеристики не допускают прямого количественного измерения (техническими средствами) и оцениваются интуитивно в условных единицах (баллах). В случае продуктов питания важную роль играют органолептические показатели: вкус, цвет, запах и т.п. Необходимо исключать нетранзитивные подмножества в экспертных измерениях, для этого используются различные методы [18–20].

Считается, что увеличение числа экспертов (опрашиваемых) решает проблему, но порой это не так. Например, при массовом опросе о выборе проекта освоения территории (зеленая зона, парк семейного отдыха, деловой центр) была выявлена нетранзитивность в ответах [21]. Предполагается, что люди оценивают проекты с учетом определенных факторов (экологических, социальных, финансовых), но веса (значимости) этих факторов для разных людей различны. Если совместное распределение весов подобно тем, что изучаются в настоящей статье, это могло бы объяснить результаты. При этом более подробный анализ данных компьютерными методами статистики (кластерный, факторный анализ и т.п.) мог бы показать деление людей на группы по взглядам, даже если эти группы никак формально не позиционируются и не осознаются участниками.

Отметим также работы [22, 23].

Свойства методов принятия решений в многокритериальных задачах индивидуального выбора разносторонне изучались в [24]. В условиях нетранзитивности при сравнении какого-то текущего варианта выбора с другими всегда может найтись «лучший» вариант, что при формальном отношении ведет к бесконечному марковскому блужданию [25]. При современном развитии искусственного интеллекта, автоматических систем принятия решения, роботов необходимо учитывать феномен нетранзитивности. В подобной ситуации человек может осознать происходящее и принять волевое решение, а машина может заикнуться.

## 2. Определения и известные результаты

Дадим более строгие определения.

*Определение 1. Отношение  $\prec$  называется нетранзитивным, если для каких-либо объектов  $A, B, C$  из соотношений  $A \prec B, B \prec C$  НЕ следует  $A \prec C$ , а напротив, может быть  $C \prec A$ .*

*Определение 2. Набор объектов  $A, B, C$  называется нетранзитивным, если на нем реализуется нетранзитивность отношения превосходства, т.е. выполнено:  $A \prec B \prec C \prec A$  (либо в обратном порядке).*

*Определение 3.  $X$  стохастически предшествует  $Y$  ( $X \prec Y$ ), если*

$$\mathbf{E} \operatorname{sign}(Y - X) > 0$$

*или*

$$\mathbf{P}(X < Y) > \mathbf{P}(X > Y).$$

Если  $\mathbf{P}(X = Y) = 0$  (например, случайные величины независимы и непрерывны или с непересекающимися областями значений), то  $X \prec Y$  эквивалентно

$$\mathbf{P}(X < Y) > \frac{1}{2}.$$

Заметим, что если случайные величины независимы и непрерывны, а кроме того, одинаково распределены, то всегда верно  $\mathbf{P}(X < Y) = 1/2$ . Для непрерывных случайных величин это равенство может нарушаться как от разной распределенности, так и от зависимости, эти случаи требуют отдельного рассмотрения.

Итак, пусть заданы случайные величины  $X_1$ ,  $X_2$  и  $X_3$  такие, что

$$\mathbf{P}(X_1 < X_2) > \frac{1}{2}, \quad \mathbf{P}(X_2 < X_3) > \frac{1}{2}, \quad \mathbf{P}(X_3 < X_1) > \frac{1}{2},$$

тогда  $X_1 \prec X_2$ ,  $X_2 \prec X_3$ , но  $X_3 \prec X_1$ . Таким образом, ситуация нетранзитивности возникает, когда

$$P_{X_1 X_2 X_3} = \min\{\mathbf{P}(X_1 < X_2), \mathbf{P}(X_2 < X_3), \mathbf{P}(X_3 < X_1)\} > \frac{1}{2},$$

причем интерес представляет не только сам факт, но и сила нетранзитивности, мерой которой может служить величина  $P_{X_1 X_2 X_3}$ .

В [9] показано, что для независимых случайных величин

$$(2) \quad \max_{X_1, X_2, X_3} P_{X_1 X_2 X_3} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0,618.$$

В [26, 27] изучалась комбинация из  $n \geq 3$  независимых случайных величин, впоследствии в [28] было показано (и позднее в [29] передоказано геометрическим методом), что максимум вероятностей

$$P_{X_1 \dots X_n} = \min\{\mathbf{P}(X_1 < X_2), \dots, \mathbf{P}(X_{n-1} < X_n), \mathbf{P}(X_n < X_1)\}$$

составляет следующую величину:

$$\max_{X_1, \dots, X_n} P_{X_1 \dots X_n} = 1 - \left(4 \cos^2 \frac{\pi}{n+2}\right)^{-1}, \quad n \geq 3,$$

что совпадает с (2) при  $n = 3$ , поскольку

$$\cos \frac{\pi}{5} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}.$$

Для зависимых величин в [27] было доказано:

$$\max_{X_1, \dots, X_n} P_{X_1 \dots X_n} = \frac{n-1}{n}, \quad n \geq 3,$$

в частности, при  $n = 3$  получаем  $P_{X_1 X_2 X_3} = 2/3$ .

Применительно к трем зависимым случайным величинам игровая интерпретация может быть следующей: разыгрывается случайный вектор  $(X_1, X_2, X_3)$ , перед этим два игрока последовательно выбирают каждый свой

номер компоненты вектора. С чьим номером компонента окажется больше, тот и выиграл. Нетранзитивность означает, что какой бы номер ни выбрал первый игрок, второй игрок может выбрать себе номер так, чтобы обеспечить вероятность выигрыша  $P_{X_1 X_2 X_3} > 1/2$ , т.е. получает преимущество.

Рассмотрим вероятностно-статистическую модификацию парадокса Кондорсе, соответствующую сколь угодно большому числу избирателей, каждый из которых может иметь одно из трех мнений о кандидатах, описываемых (1), равномерно.

Пусть набор зависимых случайных величин  $(X, Y, Z)$  принимает значения из (1) с вероятностями по  $1/3$ . Тогда

$$\mathbf{P}(X < Y) = \mathbf{P}(Y < Z) = \mathbf{P}(Z < X) = \frac{2}{3}.$$

При этом каждая из величин равномерно распределена на множестве  $\{1, 2, 3\}$ .

Возникает вопрос, как перейти от дискретного распределения к непрерывному. Далее рассмотрим различные примеры.

Напомним также понятие копулы [30].

*Определение 4. Копулой ( $m$ -мерной)  $C$  называется функция многомерного распределения на  $[0, 1]^m$  с равномерными частными (маргинальными) распределениями.*

*Копулой распределения  $F$  в  $R^m$  называется такая копула  $C$ , которая удовлетворяет выражению*

$$F(x_1, \dots, x_m) = C(F_1(x_1), \dots, F_m(x_m)),$$

где  $F_1, \dots, F_m$  – частные функции распределения.

Такое представление существует по теореме Склера и единственно в случае непрерывных частных распределений. Далее будем предполагать непрерывность.

Если заданы  $X_1, \dots, X_m$  и  $U_i = F_i(X_i)$ ,  $1 \leq i \leq n$ , то все  $U_i$  равномерно распределены на  $[0, 1]$ , с совместным распределением  $C$ , т.е.

$$\mathbf{P}(U_1 \leq u_1, \dots, U_m \leq u_m) = C(u_1, \dots, u_m).$$

В непрерывном случае, если  $X_i$  одинаково распределены, то

$$\mathbf{P}(X_i < X_j) = \mathbf{P}(U_i < U_j), \quad i \neq j.$$

### 3. Трехмерные непрерывные копулы

Рассмотрим сначала некоторые естественные обобщения примера Кондорсе с равномерными частными распределениями на  $[0, 1]$  (полученные трехмерные распределения могут использоваться в качестве копул).

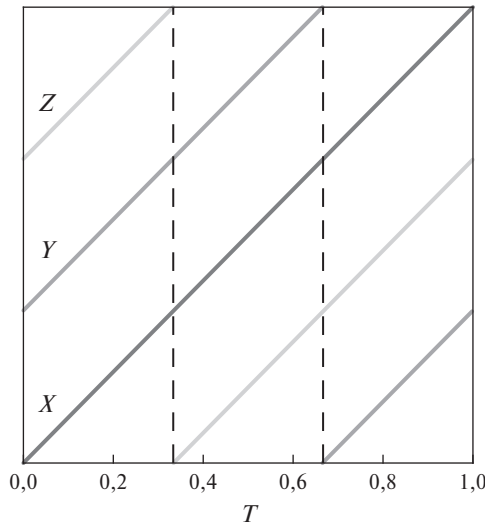


Рис. 1.  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  в зависимости от  $T$  в примере 1.

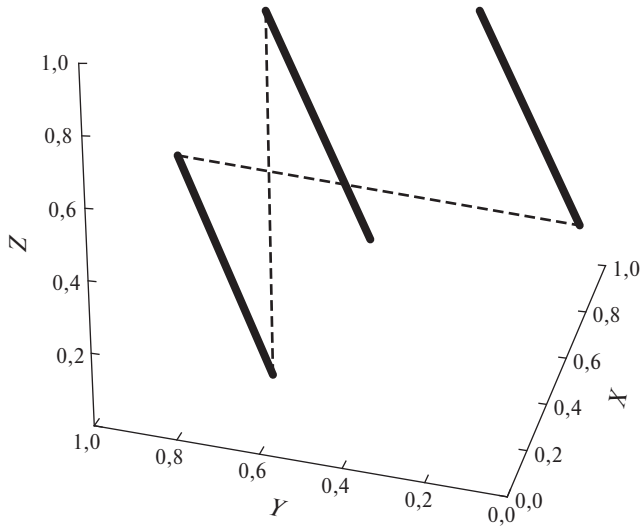


Рис. 2. Распределение в единичном кубе в примере 1.

*Пример 1.* Пусть

$$X = T, \quad Y = \left\{ T + \frac{1}{3} \right\}, \quad Z = \left\{ T + \frac{2}{3} \right\},$$

где  $\{.\}$  – дробная часть числа,  $T$  равномерно распределена на  $[0, 1]$ , тогда  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  равномерно распределены на  $[0, 1]$  и

$$(3) \quad \mathbf{P}(X < Y) = \mathbf{P}(Y < Z) = \mathbf{P}(Z < X) = \frac{2}{3}.$$

Графики  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  в зависимости от  $T$  представлены на рис. 1. Вероятности при этом соответствуют долям отрезка  $[0, 1]$ , на которых выполняются соответствующие неравенства.

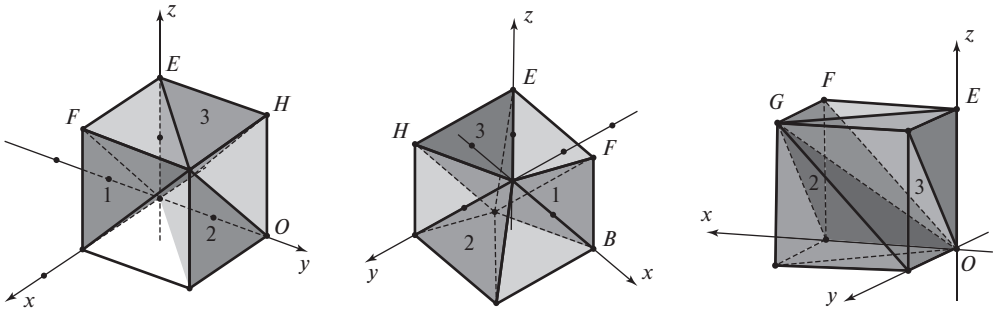


Рис. 3. Распределение в единичном кубе в примере 2.

В этом случае распределение вектора оказывается непрерывным, но не абсолютно непрерывным (имеющим плотность), а сингулярным (сосредоточенным на многообразии меньшей размерности – трех отрезках) в единичном кубе (см. рис. 2).

Перейдем к рассмотрению абсолютно непрерывных распределений. Обозначим плотность совместного распределения случайных величин  $X, Y, Z$  через  $p(x, y, z)$ , где  $x, y, z \in [0, 1]$ .

*Пример 2.* Пусть  $p(x, y, z) = 2$ , если  $x < y < z$  или  $z < x < y$  или  $y < z < x$ , и  $p(x, y, z) = 0$  иначе. Тогда также  $X, Y, Z$  равномерно распределены на  $[0, 1]$  и верно (3). Указанную плотность можно представить в виде:

$$(4) \quad p(x, y, z) = 1 - \text{sign}\{(y - x)(z - y)(x - z)\}.$$

Данное распределение сосредоточено в трех пирамидах внутри единичного куба (см. рис. 3).

В этом случае трехмерное распределение имеет плотность, но эта плотность разрывна. Однако вид (4) наводит на мысль перейти к полиномиальной плотности.

*Пример 3.* Пусть

$$(5) \quad p(x, y, z) = 1 - K(y - x)(z - y)(x - z).$$

Можно проверить, что в этом случае частные распределения остаются равномерными на  $[0, 1]$ . Вопрос заключается в выборе константы  $K$  так, чтобы плотность оставалась неотрицательной.

Имеем

$$\max_{[0,1]^3} \{(y - x)(z - y)(x - z)\} = \frac{1}{4},$$

причем этот максимум достигается в точках  $(1/2, 1, 0)$ ,  $(0, 1/2, 1)$ ,  $(1, 0, 1/2)$ .

Отсюда максимально допустимое  $K = 4$ , положим

$$p(x, y, z) = 1 - 4(y - x)(z - y)(x - z),$$

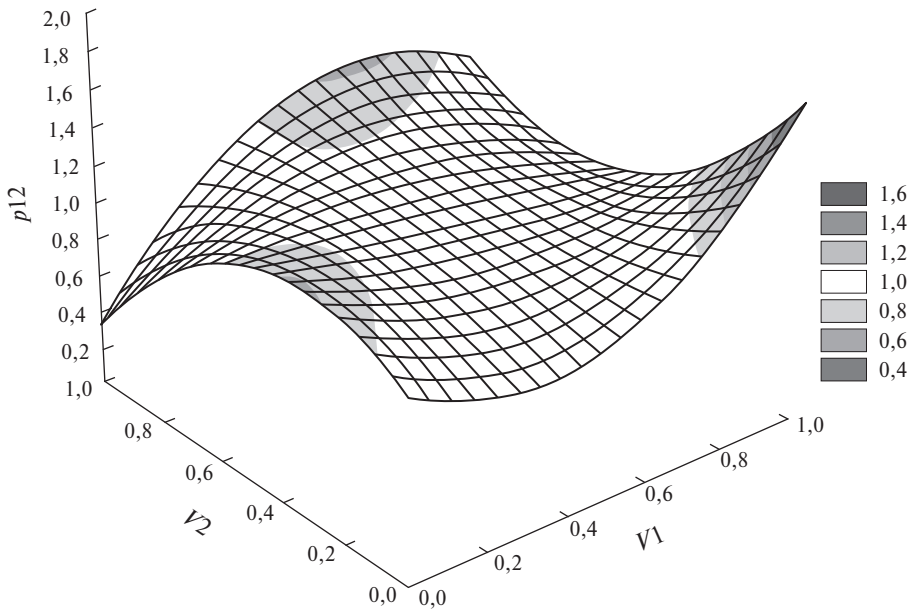


Рис. 4. Двумерная плотность распределения в примере 3.

откуда интегрированием получаем совместную функцию распределения

$$F(x, y, z) = xyz \left( 1 + \frac{2}{3}(xy(y - x) + yz(z - y) + xz(x - z)) \right).$$

Совместная плотность  $X, Y$  принимает вид (см. рис. 4)

$$p_{12}(x, y) = 1 + \frac{2}{3}(y - x)(2 - 3x - 3y + 6xy),$$

откуда получаем

$$\mathbf{P}(X < Y) = \mathbf{P}(Y < Z) = \mathbf{P}(Z < X) = \frac{47}{90} = 0,522\dots$$

*Пример 4.* Рассмотрим плотность, промежуточную между (4) и (5):

$$(6) \quad p(x, y, z) = 1 - \sqrt[k]{4(y - x)(z - y)(x - z)},$$

где  $k$  – нечетное натуральное число,  $k \geq 3$ . Понятно, что при  $k \rightarrow \infty$  будет сходимость к ситуации в примере 2. Оценивая вероятность  $P_{XYZ}$  методом Монте-Карло по  $10^6$  точек, получили следующую таблицу:

| $k$ | $P_{XYZ}$ |
|-----|-----------|
| 3   | 0,569     |
| 5   | 0,595     |
| 7   | 0,610     |
| 9   | 0,621     |
| 11  | 0,628     |



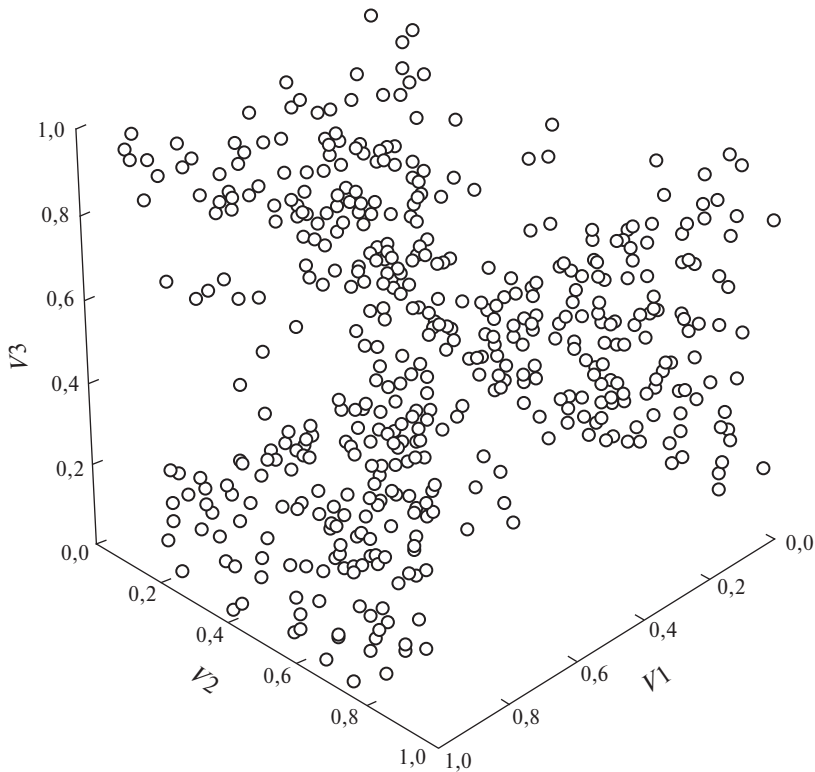


Рис. 5. Результат моделирования в примере 4.

На рис. 5 представлен результат моделирования при  $k = 11$  для  $10^3$  точек. Видна сходимость к трем пирамидам из примера 2.

#### 4. Многомерные смеси

Рассмотрим теперь другой подход, с помощью зашумления дискретных данных, как в [31] применительно к нетранзитивным костям Эфрона (независимым случайным величинам).

*Пример 5.* Пусть случайный вектор  $(X_1, X_2, X_3)$  формируется следующим образом: к значениям (1), принимаемым с вероятностями по  $1/3$ , по всем координатам прибавляются независимые нормальные величины с нулевыми средними и дисперсиями  $\sigma^2 > 0$ .

*Утверждение 1.* В примере 5 верно

$$\begin{aligned}
 P_{X_1 X_2 X_3} &= \mathbf{P}(X_1 < X_2) = \mathbf{P}(X_2 < X_3) = \mathbf{P}(X_3 < X_1) = \\
 &= \frac{1}{3} \left( 2\Phi\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2}}\right) + \Phi\left(-\frac{\sqrt{2}}{\sigma}\right) \right) > \frac{1}{2},
 \end{aligned}$$

где  $P_{X_1 X_2 X_3} \rightarrow 2/3$  при  $\sigma \rightarrow 0$  и  $P_{X_1 X_2 X_3} \rightarrow 1/2$  при  $\sigma \rightarrow \infty$ .

Доказательство представлено в Приложении.

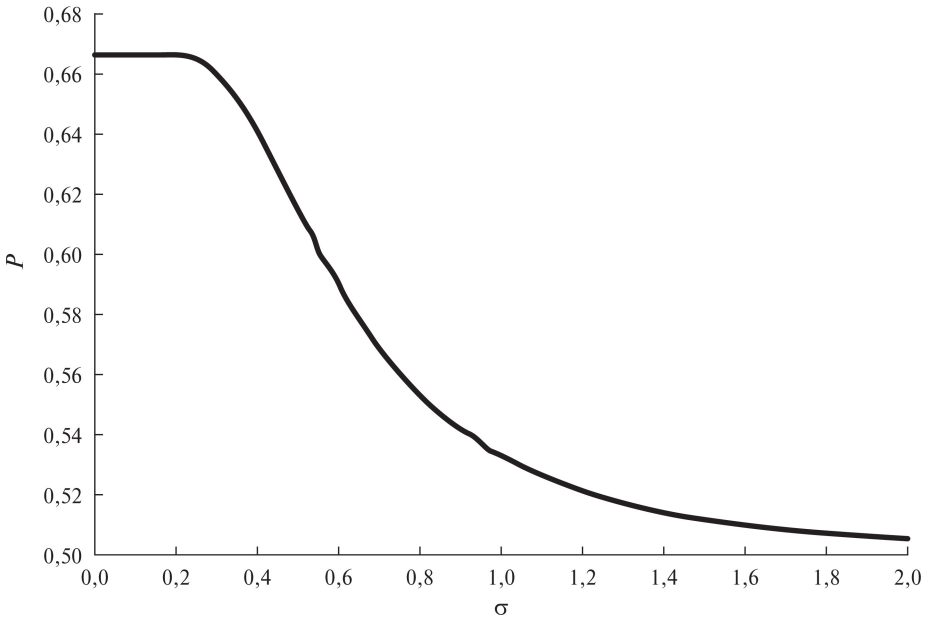


Рис. 6.  $P_{X_1 X_2 X_3}$  в зависимости от  $\sigma$  в примере 5.

Нетранзитивность здесь наблюдается при *любом*  $\sigma^2 > 0$ .

График вероятности  $P_{X_1 X_2 X_3}$  в зависимости от  $\sigma$  представлен на рис. 6.

Зададимся вопросом: при  $\sigma \rightarrow 0$  распределение сходится к дискретному (трехточечному), а что при этом происходит с копулой?

*Утверждение 2. В примере 5 при  $\sigma \rightarrow 0$  распределение копулы сходится к равномерному на объединении кубов*

$$\begin{aligned} & [0, 1/3] \times [1/3, 2/3] \times [2/3, 1], \\ & [2/3, 1] \times [0, 1/3] \times [1/3, 2/3], \\ & [1/3, 2/3] \times [2/3, 1] \times [0, 1/3], \end{aligned}$$

*с плотностью  $p(x_1, x_2, x_3) = 9$  на этом множестве и 0 иначе.*

Доказательство представлено в Приложении.

Введем обозначение для функции стандартного равномерного распределения:

$$(7) \quad R(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1, \end{cases}$$

тогда предельная копула из утверждения 2 представима в виде

$$\begin{aligned} C_0(u_1, u_2, u_3) = & \frac{1}{3} \left( R(3u_1)R(3u_2 - 1)R(3u_3 - 2) + \right. \\ & \left. + R(3u_1 - 2)R(3u_2)R(3u_3 - 1) + R(3u_1 - 1)R(3u_2 - 2)R(3u_3) \right). \end{aligned}$$

Для предельной копулы верно

$$\mathbf{P}(U_1 < U_2) = \mathbf{P}(U_2 < U_3) = \mathbf{P}(U_3 < U_1) = 2/3.$$

Перейдем теперь к более общему случаю.

Напомним, что (дискретная) *многомерная смесь* – это распределение случайного вектора, который с некоторыми вероятностями (весами) принимает значения случайных векторов с заданными распределениями (причем выбор вектора делается независимо от значений).

Если берется смесь гауссовских векторов, то ее называют *гауссовской* смесью и, таким образом, пример 5 был примером гауссовской смеси.

Пусть случайный вектор  $(X_1, X_2, X_3)$  имеет распределение смеси с весами  $p_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , случайных векторов вида

$$(a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}) + \lambda(\eta_{i1}, \eta_{i2}, \eta_{i3}),$$

где  $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$  – некоторая матрица,  $(\eta_{i1}, \eta_{i2}, \eta_{i3})$ ,  $i = 1, 2, 3$ , – случайные векторы,  $\lambda > 0$ .

Пусть  $0 < p_i < 1/2$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

*Теорема 1.* Если  $\eta_{i1} - \eta_{i2}$ ,  $\eta_{i2} - \eta_{i3}$ ,  $\eta_{i3} - \eta_{i1}$  непрерывны при всех  $i = 1, 2, 3$  и  $a_{ik}$  по строкам  $A$  идут в том же порядке, что в (1), тогда существует  $\lambda_1 > 0$  такое, что при  $\lambda < \lambda_1$  имеет место нетранзитивность, т.е.  $P_{X_1 X_2 X_3} > 1/2$ , и

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} P_{X_1 X_2 X_3} = 1 - \max\{p_1, p_2, p_3\}.$$

Доказательство представлено в Приложении.

*Теорема 2.* Если  $\eta_{ij} = \eta_j$ , где  $\eta_j$  независимы и имеют одинаковое непрерывное распределение,  $i, j = 1, 2, 3$ , и  $a_{ik}$  по столбцам  $A$  идут в том же порядке, что в (1), то существует  $\lambda_2 > 0$  такое, что при  $\lambda < \lambda_2$  имеет место нетранзитивность  $(U_1, U_2, U_3)$ , т.е.  $P_{U_1 U_2 U_3} > 1/2$ , и при  $\lambda \rightarrow 0$  распределение копулы сходится к смеси равномерных распределений с весами  $p_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  на параллелепипедах

$$\begin{aligned} & [0, p_1] \times [p_1, p_1 + p_2] \times [p_1 + p_2, 1], \\ & [p_1 + p_2, 1] \times [0, p_1] \times [p_1, p_1 + p_2], \\ & [p_1, p_1 + p_2] \times [p_1 + p_2, 1] \times [0, p_1], \end{aligned}$$

так что

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} P_{U_1 U_2 U_3} = 1 - \max\{p_1, p_2, p_3\}.$$

Доказательство представлено в Приложении.

В этом случае предельную копулу, с учетом обозначения (7), можно представить в виде

$$\begin{aligned}
 C_0(u_1, u_2, u_3) &= \\
 &= p_1 R\left(\frac{u_1}{p_1}\right) R\left(\frac{u_2 - p_1}{p_2}\right) R\left(\frac{u_3 - (p_1 + p_2)}{p_3}\right) + \\
 &+ p_2 R\left(\frac{u_1 - (p_1 + p_2)}{p_3}\right) R\left(\frac{u_2}{p_1}\right) R\left(\frac{u_3 - p_1}{p_2}\right) + \\
 &+ p_3 R\left(\frac{u_1 - p_1}{p_2}\right) R\left(\frac{u_2 - (p_1 + p_2)}{p_3}\right) R\left(\frac{u_3}{p_1}\right).
 \end{aligned}$$

## 5. Заключение

В работе получены новые результаты в изучении нетранзитивности отношения стохастического предшествования в теории вероятностей. Исходя из парадокса Кондорсе, построены примеры трехмерных непрерывных распределений и копул, порождающих нетранзитивные наборы зависимых случайных величин. Рассмотрены случаи сингулярных распределений, распределений с разрывной плотностью, полиномиальной плотностью, а также случай многомерных смесей. Доказаны предельные теоремы для многомерных смесей. Подобные многомерные непрерывные распределения могут описывать и объяснять проявления нетранзитивности в психологии, экономике, биологии и др. Этот феномен должен учитываться при построении систем автоматического принятия решений, искусственного интеллекта, роботов и т.п.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

*Доказательство утверждения 1.* Используем представление

$$X_i = X_i^0 + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

где вектор  $(X_1^0, X_2^0, X_3^0)$  принимает значения (1) равновероятно и случайные величины  $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$  независимы.

Найдем вероятность  $\mathbf{P}(X_1 < X_2)$ , остальные находятся аналогично. Имеем

$$\mathbf{P}(X_1 < X_2) = \mathbf{P}(X_1^0 + \varepsilon_1 < X_2^0 + \varepsilon_2) = \mathbf{P}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 < X_2^0 - X_1^0).$$

Обозначим  $\varepsilon = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$ , тогда  $\varepsilon \sim N(0, 2\sigma^2)$ . Получаем

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}(X_1 < X_2) &= \frac{1}{3}\mathbf{P}(\varepsilon < 2 - 1) + \frac{1}{3}\mathbf{P}(\varepsilon < 1 - 3) + \frac{1}{3}\mathbf{P}(\varepsilon < 3 - 2) = \\
 &= \frac{2}{3}\mathbf{P}(\varepsilon < 1) + \frac{1}{3}\mathbf{P}(\varepsilon < -2) = \frac{1}{3}\left(2\Phi\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2}}\right) + \Phi\left(-\frac{\sqrt{2}}{\sigma}\right)\right).
 \end{aligned}$$

*Доказательство утверждения 2.* Обозначим через  $\nu$  номер вектора из (1), выбранный в качестве значения  $(X_1^0, X_2^0, X_3^0)$ . При условии  $\nu = 1$  имеем

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{1}{3} \left( \Phi \left( \frac{1 + \varepsilon_1 - 1}{\sigma} \right) + \Phi \left( \frac{1 + \varepsilon_1 - 2}{\sigma} \right) + \Phi \left( \frac{1 + \varepsilon_1 - 3}{\sigma} \right) \right), \\ U_2 &= \frac{1}{3} \left( \Phi \left( \frac{2 + \varepsilon_2 - 1}{\sigma} \right) + \Phi \left( \frac{2 + \varepsilon_2 - 2}{\sigma} \right) + \Phi \left( \frac{2 + \varepsilon_2 - 3}{\sigma} \right) \right), \\ U_3 &= \frac{1}{3} \left( \Phi \left( \frac{3 + \varepsilon_3 - 1}{\sigma} \right) + \Phi \left( \frac{3 + \varepsilon_3 - 2}{\sigma} \right) + \Phi \left( \frac{3 + \varepsilon_3 - 3}{\sigma} \right) \right). \end{aligned}$$

Заметим, что  $\varepsilon_i/\sigma \sim N(0, 1)$ . Определим случайные величины  $U_i^0 = \Phi(\varepsilon_i/\sigma)$ , тогда они имеют равномерное распределение на  $[0, 1]$  и независимы. При этом

$$\Phi \left( \frac{\varepsilon_i + c}{\sigma} \right) \xrightarrow{P} \begin{cases} 0, & c < 0 \\ U_i^0, & c = 0, \\ 1, & c > 0, \end{cases} \quad \sigma \rightarrow 0.$$

Отсюда

$$(U_1, U_2, U_3) \xrightarrow{P} \left( \frac{1}{3}U_1^0, \frac{1}{3} + \frac{1}{3}U_2^0, \frac{2}{3} + \frac{1}{3}U_3^0 \right), \quad \sigma \rightarrow 0,$$

т.е. в пределе получаем равномерное распределение на кубе  $[0, 1/3] \times [1/3, 2/3] \times [2/3, 1]$ . Аналогично рассматриваем случаи  $\nu = 2, 3$ .

*Доказательство теоремы 1.* Используем представление

$$(X_1, X_2, X_3) = (a_{\nu 1}, a_{\nu 2}, a_{\nu 3}) + \lambda(\eta_{\nu 1}, \eta_{\nu 2}, \eta_{\nu 3}),$$

где  $\nu$  принимает значения 1, 2, 3 с вероятностями  $p_1, p_2, p_3$  независимо от  $\eta_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ .

Обозначим распределения  $\eta_{i1} - \eta_{i2}$  через  $G_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Получаем

$$\mathbf{P}(X_1 < X_2) = \sum_{i=1}^3 p_i G_i \left( \frac{a_{i2} - a_{i1}}{\lambda} \right) \rightarrow p_1 + p_3 = 1 - p_2 > \frac{1}{2}, \quad \lambda \rightarrow 0,$$

поскольку  $a_{12} > a_{11}$ ,  $a_{22} < a_{21}$ ,  $a_{32} > a_{31}$ . Аналогично,

$$\mathbf{P}(X_2 < X_3) \rightarrow 1 - p_3, \quad \mathbf{P}(X_3 < X_1) \rightarrow 1 - p_1, \quad \sigma \rightarrow 0$$

и

$$P_{X_1 X_2 X_3} \rightarrow \min\{1 - p_1, 1 - p_2, 1 - p_3\} = 1 - \max\{p_1, p_2, p_3\} > \frac{1}{2}, \quad \sigma \rightarrow 0.$$

*Доказательство теоремы 2.* Будем доказывать аналогично утверждению 2. Используем представление

$$(X_1, X_2, X_3) = (a_{\nu 1}, a_{\nu 2}, a_{\nu 3}) + \lambda(\eta_1, \eta_2, \eta_3),$$

где случайные величины  $\eta_j$ ,  $j = 1, 2, 3$  непрерывны, независимы и одинаково распределены, обозначим их распределение через  $G$ .

При условии  $\nu = 1$  имеем

$$U_j = \sum_{i=1}^3 p_i G \left( \frac{a_{1j} - a_{ij}}{\lambda} + \eta_j \right), \quad j = 1, 2, 3,$$

откуда

$$(U_1, U_2, U_3) \xrightarrow{d} (p_1 U_0^1, p_1 + p_2 U_2^0, p_1 + p_2 + p_3 U_3^0), \quad \lambda \rightarrow 0,$$

т.е. в пределе получаем равномерное распределение на параллелепипеде  $[0, p_1] \times [p_1, p_1 + p_2] \times [p_1 + p_2, 1]$ . Аналогично рассматриваем случаи  $\nu = 2, 3$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Poddiakov A., Valsiner J.* Intransitivity cycles and their transformations: How dynamically adapting systems function? / *Qualitative Mathematics for the Social Sciences: Mathematical Models for Research on Cultural Dynamics*. Abingdon, NY: Routledge, 2013. P. 343–391.
2. *Поддьяков А.Н.* Принцип нетранзитивности превосходства в разных парадигмах // *Вопросы психологии*. 2019. № 2. С. 3–16.
3. *Vandermeer J., Perfecto I.* Intransitivity as a dynamic assembly engine of competitive communities // *PNAS*. 2023. V. 120. No. 15. Art. e2217372120.
4. *Verdu M., Alcantara J.M., Navarro-Cano J.A., et al.* Transitivity and intransitivity in soil bacterial networks // *ISME J*. 2023. V. 17. P. 2135–2139.
5. *Arcones M.A., Kvam P.H., Samaniego F.J.* Nonparametric estimation of a distribution subject to a stochastic precedence constraint // *J. Amer. Stat. Assoc.* 2002. V. 97. No. 457. P. 170–182.
6. *Boland P.J., Singh H., Cukic B.* The stochastic precedence ordering with applications in sampling and testing // *J. Appl. Probab.* 2004. V. 41. No. 1. P. 73–82.
7. *Лепский А.Е.* Стохастическое и нечеткое упорядочивание методом минимальных преобразований // *АиТ*. 2017. № 1. С. 59–79.  
*Lepskiy A.E.* Stochastic and fuzzy ordering with the method of minimal transformations // *Autom. Remote Control*. 2017. V. 78. No. 1. P. 50–66.
8. *Steinhaus H., Trybula S.* On a paradox in applied probabilities // *Bull. de l'Acad. Polon. des Sci.* 1959. V. 7. P. 67–69.
9. *Trybula S.* On the paradox of three random variables // *Zastos. Matem.* 1961. V. 5. No. 4. P. 321–332.
10. *Demler O.V., Demler I.A.* Non-transitivity of the Win Ratio and the Area Under the Receiver Operating Characteristics Curve (AUC): a case for evaluating the strength of stochastic comparisons. Available at: <https://arxiv.org/abs/2309.01791> (accessed November 10, 2023).

11. *Gardner M.* The paradox of the nontransitive dice and the elusive principle of indifference // *Sci. Amer.* 1970. V. 223. No. 6. P. 110–114.
12. *Gardner M.* On the paradoxical situations that arise from nontransitive relations // *Sci. Amer.* 1974. V. 231. No. 6. P. 120–125.
13. *Лебедев А.В.* Проблема нетранзитивности для трех непрерывных случайных величин // *АиТ.* 2019. № 6. С. 91–103.  
*Lebedev A.V.* The nontransitivity problem for three continuous random variables // *Autom. Remote Control.* 2019. V. 80. No. 6. P. 1058–1068.
14. *Лебедев А.В.* Нетранзитивные триплеты непрерывных случайных величин и их приложения // *Информатика и ее применения.* 2019. Т. 13. № 3. С. 20–26.
15. *Горбунова А.В., Лебедев А.В.* Эффекты стохастической нетранзитивности в системах массового обслуживания // *Управление большими системами.* 2020. Т. 85. С. 23–50.
16. *Gorbunova A.V., Lebedev A.V.* Nontransitivity of tuples of random variables with polynomial density and its effects in Bayesian models // *Math. Comput. Simulat.* 2022. V. 202. P. 181–192.
17. *Poddiakov A., Lebedev A.V.* Intransitivity and meta-intransitivity: meta-dice, levers and other opportunities. // *Eur. J. Math.* 2023. V. 9. Art. N 27. P. 1–17.
18. *Хамханова Д.Н., Шарипова С.М.* Исключение нетранзитивных подмножеств из результатов определения весовых коэффициентов показателей качества хлебо-булочных изделий методом ранжирования // *Фундаментальные исследования.* 2013. № 11-2. С. 184–187.
19. *Хамханова Д.Н., Шарипова С.М.* Понятие «нетранзитивные подмножества» в перерабатывающих отраслях агропромышленного комплекса / *Образование и наука. Материалы национальной конференции.* 2019. С. 301–305.
20. *Шарипова С.М.* Исследование нетранзитивных подмножеств в результатах экспертных измерений // *Дисс. ... канд. техн. наук.* ЮЗГУ. Улан-Удэ. 2014.
21. *Зеляк А.А., Шокин Я.В.* Исследование нарушения принципа транзитивности предпочтений в рамках развития поведенческой экономической теории // *РИСК: Ресурсы. Информация. Снабжение. Конкуренция.* 2012. № 4. С. 212–216.
22. *Волкова А.А., Панов С.А., Шокин Я.В.* Анализ феномена нетранзитивности предпочтений потребителей в свете современных нейроэкономических исследований // *Вест. Челяб. ГУ.* 2019. № 9 (431). С. 131–142.
23. *Шокин Я.В., Волкова А.А.* Обзор приложений нетранзитивности потребительских предпочтений в экономике // *Тр. ИСА РАН.* 2022. Т. 72. № 4. С. 62–67.
24. *Ларичев О.И.* Свойства методов принятия решений в многокритериальных задачах индивидуального выбора // *АиТ.* 2002. № 2. С. 146–158.  
*Larichev O.I.* Properties of the Decision Methods in the Multicriteria Problems of Individual Choice // *Autom. Remote Control.* 2002. V. 63. No. 2. P. 304–315.
25. *Зутлер И.А.* Выбор последовательными сравнениями как непрерывное марковское блуждание // *АиТ.* 2011. № 12. С. 60–74.  
*Zutler I.A.* The sequential alternative search as a continuous Markov random walk // *Autom. Remote Control.* 2011. V. 72. No. 12. P. 2477–2491.
26. *Trybula S.* On the paradox of  $n$  random variables // *Zastos. Matem. (Appl. Math.)* 1965. V. 8. No. 2. P. 143–156.
27. *Usiskin Z.* Max–min probabilities in the voting paradox // *Ann. Math. Stat.* 1964. V. 35. No. 2. P. 857–862.

28. *Богданов И.И.* Нетранзитивные рулетки // Матем. просвещение. 2010. Сер. 3. Вып. 14. С. 240–255.
29. *Komisarski A.* Nontransitive random variables and nontransitive dice // Amer. Math. Monthly. 2021. V. 128. No. 5. P. 423–434.
30. *Nelsen R.* An introduction to copulas. NY, USA. Springer, 2006.
31. *Thangalevu K., Brunner E.* Wilcoxon–Mann–Whitney test for stratified samples and Efron’s paradox dice // J. Statist. Plann. Inference. 2007. V. 137. No. 3. P. 720–737.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии И.В. Родионовым.*

Поступила в редакцию 13.11.2023

После доработки 21.06.2024

Принята к публикации 09.01.2025